Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Matrici

Una matrice è un simbolo che si ottiene disponendo oggetti su un certo numero di righe ed un certo numero di colonne

Se n = numero di righe
e m = numero di colonne

si parla di matrice $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad n \times m$$

l'elemento a_{ij} della matrice A si dice di

- (•) ordine pari se $i+j$ è pari
- (•) ordine dispari se $i+j$ è dispari

Sia a_{ij} un elemento della matrice A.

Si definisce minore complementare di A associato all'elemento a_{ij} la nuova matrice che si ottiene da A sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna di A

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minore compl. associato ad a_{23} $M_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Minore compl associato ad a_{33} $M_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Determinante di una matrice

Sia A una matrice quadrata $n \times n$

(1) se A è matrice 1×1, $A = (a)$

$$\Rightarrow \det A = a$$

(2) se A è matrice 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\boxed{\det A = ad - bc}$$

In generale se A è matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -- & a_{1n} \\ a_{21} & \text{———} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & \text{———} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad n \times n$$

Primo <u>scelgo</u> una <u>riga</u> oppure una <u>colonna</u> di A

Per ciascun elemento a_{ij} della riga / colonna che ho scelto considero

$$\boxed{A_{ij} = \operatorname{ord}(a_{ij}) \cdot a_{ij} \cdot \det M_{ij}}$$

dove $\operatorname{ord}(a_{ij}) = \begin{cases} + & \text{se } a_{ij} \text{ ordine pari} \\ - & \text{se } a_{ij} \text{ ordine dispari} \end{cases}$

Infine sommo tutti questi numeri A_{ij} al variare degli elementi di una stessa riga o stessa colonna (scelta iniziale)

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \operatorname{ord}(a_{12}) \cdot \cancel{0} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \quad 0$$

$$\det A = \cancel{\operatorname{ord}(a_{12}) \cdot 0} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \operatorname{ord}(a_{22}) \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \operatorname{ord}(a_{32}) \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= +1 \cdot (21 - 6 \cdot 1) - 2\,(14 - 4 \cdot 1) =$$

$$= 15 - 20 = -5$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det = 0 + 0 + 0 + \underbrace{\operatorname{ord}(a_{44})}_{+} \cdot (-1) \cdot$$

$$\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\left[0 + 0 + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -[3 - 2 \cdot 0] = -3$$

Stesso esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \cancelto{0}{\underbrace{\mathrm{ord}(a_{21})}_{-} \cdot 0 \cdot \det(\quad)} + \underbrace{\mathrm{ord}(a_{22})}_{+} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 0 + 0$$

$$= 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left[+1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 0 + 0 \right] =$$

$$= 3 \left[-1 - 3 \cdot 0 \right] = -3$$

<u>Importante</u>: Il determinante di una matrice non dipende dalla scelta di riga e/o colonna che si fa inizialmente.

Formula in generale: se fisso la riga i-esima

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \det M_{ij}}$$

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1} (-1) \cdot a_{ij} \det M_{ij}}$$

Operazioni matriciali

Sia A una matrice $A = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$

Se $b \in \mathbb{R} \Rightarrow b \cdot A = (b \cdot a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$

(Somma) Siano A e B due matrici della stessa forma

$$A = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m} \qquad B = (b_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$$

$$\Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 \\ 1+1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Per la somma vale

$$A + B = B + A$$

proprietà commutativa.

(prodotto) Siano A e B due matrici con

$$A = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m} \qquad B = (b_{ij})_{i=1}^{m} {}_{j=1}^{k}$$

il numero di colonne di A = numero di righe di B

Allora

$$A \cdot B = (c_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{k}$$

con

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj}}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0$$

$$= 2$$

1° riga A

1° colonna B

1ª riga A   1ª colonna B

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = (1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 0(-5)$$
$$= -1$$

1ª riga A   2ª colonna B

Primo, osserva che $A \cdot B \neq B \cdot A$

non abbiamo la proprietà commutativa del prodotto.

Secondo, abbiamo definito il prodotto in tal modo per preservare la regola di annullamento del prodotto, ossia

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \text{ opp. } B = 0$$

dove
$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio Se avessi definito

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$A \cdot B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$$

per la regola annullamento prodotto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A, B \neq 0 \quad \text{ma} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con regola come somma

<u>Matrici</u> <u>invertibili</u>

Sia

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \ \ 1 \end{pmatrix}$$

ossia

$$I = (a_{ij})_{i=1}^{n} \ {}_{j=1}^{n}$$

dove

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Chiamata "matrice identità"

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ (o si dice anche <u>matrice</u> di <u>ordine</u> <u>n</u>)

Diremo che A è <u>invertibile</u> se esiste una matrice B di ordine n :

Una matrice B di ordine n :

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I}$$

Se esiste tale matrice B essa è unica,

<u>Teorema</u> Sia A matrice di ordine n . Allora

A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

In tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & & c_{nn} \end{pmatrix}^T$$

dove $\quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

e se $B = (b_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^T = (b_{ji})_{j=1}^{n} {}_{i=1}^{n}$$

matrice trasposta = matrice che ottengo scambiando le righe con le colonne

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ A è invertibe

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (c_{ij})^{T}_{\substack{\hat{i}=1 \\ \hat{j}=1}} \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

$c_{11} = +4 \qquad c_{12} = -3$

$c_{21} = -2 \qquad c_{22} = +1$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{T} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-2) \cdot (-\frac{1}{2}) \\ (-3)(-\frac{1}{2}) & 1 \cdot (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rango di una matrice -

Sia A una matrice $n \times m$

In A possiamo formare delle sottomatrici (ossia delle nuove matrici che si ottengono da A sopprimendo un certo numero di righe di A e/o un certo numero di colonne di A)

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2 \times 4$$

Sottomatrici

Sopp. 1ª colonna $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

Sopp. 1ª + 2ª colonna $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Si chiama minore di A ogni sottomatrice quadrata di A

Def Sia A una matrice $n \times m$

Diciamo che il rango di A è $p \in \mathbb{N}$

$(\text{rango } A = p)$

se

(1) Deve esistere almeno un minore di A di ordine p con $\det \neq 0$

(2) Ogni minore di ordine $(p+1)$ di A deve

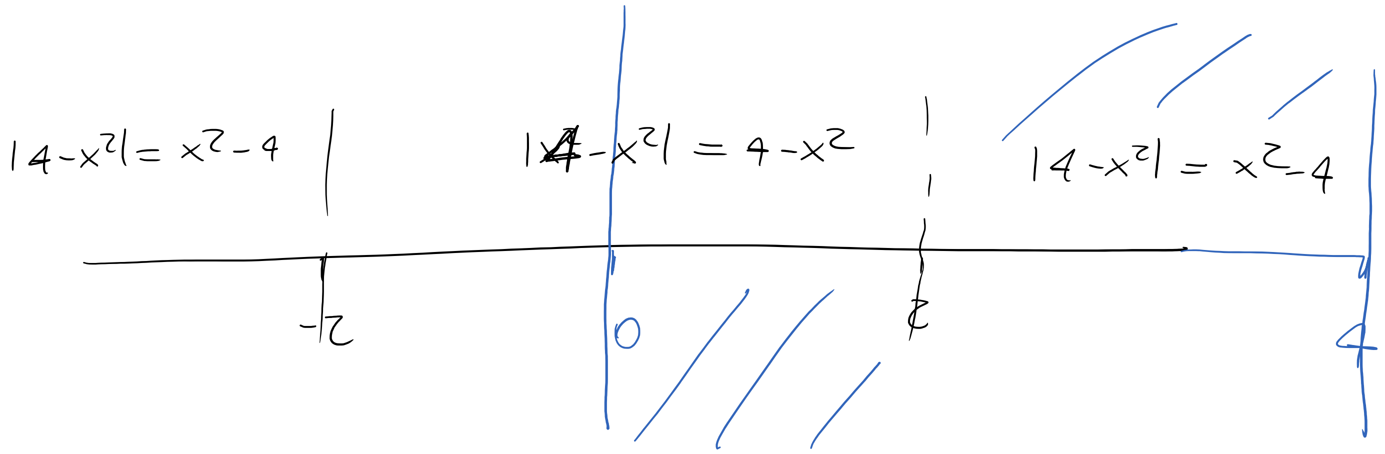
avere det $= 0$

Esercizio

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+|4-x^2|}}\,dx$$

$$4-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$$

$$|4-x^2| = \begin{cases} 4-x^2 & \text{se } x \in [0,2] \\ x^2-4 & \text{se } [2,4] \end{cases}$$



Ossia

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+|4-x^2|}}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+|4-x^2|}}\,dx + \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+|4-x^2|}}\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}}}\,dx + \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+x^2-4}}\,dx$$

$$\int_0 \sqrt{\cancel{x^2} + 4 - \cancel{x^2}} \qquad \int_2 \sqrt{x^2+x^2-4}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^2 x \, dx}_{2} + \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{2x^2-4}} \, dx$$

Cerco

(1) $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} \implies \int_0^2 x \, dx = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-4}} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x \, dx}{\sqrt{2x^2-4}} \overset{1° \text{sost}}{=\!=}$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \Big]_{z=2x^2-4}$$

$$= \frac{1}{4} \int z^{-\frac{1}{2}} \, dz \Big]_{z=2x^2-4}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{4} \sqrt{z}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2-4}$$

$$\implies \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{2x^2-4}} \, dx = \left[\frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 4^2 - 4} - \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 2^2 - 4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{28} - \sqrt{4} \right)$$

Concludo:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+|4-x^2|}}\,dx = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{28}-2\right)$$

<u>Esercizio</u>

$$\int \frac{4\lg x - 5}{x(2\lg x+3)}\,dx =$$

$$= \int \frac{4\lg x - 5}{\underbrace{2\lg x+3}_{g(f(x))}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\,dx \quad \underline{\underline{1^o \text{ sost}}}$$

$f(x) = \lg x$

$$= \int \frac{4z-5}{2z+3}\,dz \Big]_{z=\lg x}$$

<u>Passo 1</u> Divisione

$$\begin{array}{l|l} 4z-5 & 2z+3 \\ \hline 4z+6 & 2 \\ \hline -11 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{4z-5}{2z+3} = 2 + \frac{-11}{2z+3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4z-5}{2z+3} = 2\int dz - 11 \int \frac{1}{2z+3}\,dz$$

$$= 2z - 11 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2\,dz}{2z+3}$$

$$= 2z - \frac{11}{2} \lg|2z+3| =$$

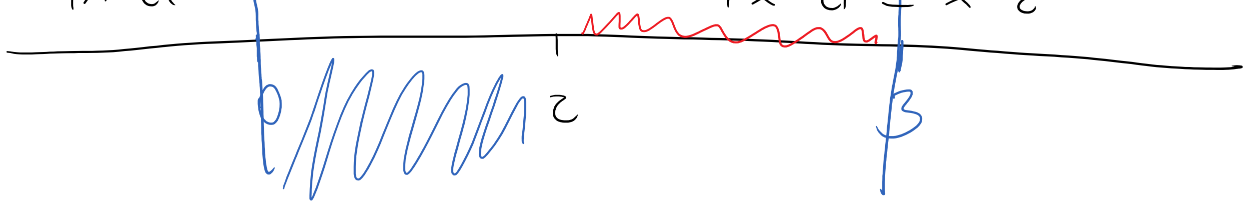
$(z = \lg x)$ $$= 2\lg x - \frac{11}{2} \lg|2\lg x + 3| + \underline{\underline{\text{cost}}}$$

Esercizio

$$\int_0^3 \frac{|x-2|}{2x+3}$$

$$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

$|x-2| = 2-x$ $\qquad\qquad$ $|x-2| = x-2$



$$\int_0^3 \frac{|x-2|}{2x+3}\,dx = \int_0^2 \frac{|x-2|}{2x+3}\,dx + \int_2^3 \frac{|x-2|}{2x+3}\,dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{2-x}{2x+3}\,dx + \int_2^3 \frac{x-2}{2x+3}\,dx$$

ovviamente $\displaystyle \int \frac{x-2}{2x+3} = -\int \frac{2-x}{2x+3}$

calcolo $\displaystyle\int \frac{x-2}{2x+3}\,dx$

$$\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

Passo1 Divisione

$$\begin{array}{l|l} x-2 & 2x+3 \\ \hline x+\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -2-\frac{3}{2} = -\frac{7}{2} & \end{array}$$

$$\int \frac{x-2}{2x+3}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{-\frac{7}{2}}{2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\int \frac{2}{2x+3}\,dx \overset{1^\circ \text{ sost}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\lg|2x+3|$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{|x-2|}{2x+3}\,dx = \int_0^2 \frac{2-x}{2x+3}\,dx + \int_2^3 \frac{x-2}{2x+3}\,dx = (*)$$

primitiva

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\lg|2x+3| \qquad\qquad \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\lg|2x+3|$$

$$(*) = \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} + \frac{7}{4}\lg|2\cdot2+3| - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{2}\cdot 0}} + \frac{7}{4}\lg|3|\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{7}{4}\lg|2\cdot3+3| - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} - \frac{7}{4}\lg|2\cdot2+3|\right)$$

$$= (-1) + \cancel{\frac{7}{4}\lg(7)} + \frac{7}{4}\lg(3) + \frac{3}{2} - \frac{7}{4}\lg(9)\ (-1)\ \cancel{-\frac{7}{4}\lg(7)}\ .$$

$$= -1 + \cancel{\frac{7}{4} \lg(7)} + \frac{7}{4} \lg(3) + \frac{3}{2} - \frac{7}{4} \lg(9) - 1 + \cancel{\frac{7}{4} \lg(7)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{7}{4} \left(\lg(3) - \lg 9 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{7}{4} \left(\lg 3 - 2 \lg 3 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \lg 3$$

<u>Esercizio</u> Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1^a colonna $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad 2^a$ colonna $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

3^a colonna $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

essendo minori di ordine 1 $\neq 0$ (lo sono tutti)

$\Longrightarrow$ rango $A = 1$

Esercizio Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 4$$

sottomatrici di ordine 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = +3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0$$

$$= 3\,(4 - 0) - 2\,(0 - 36) = 12 + 72$$

$$= 84 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ rango $A = 3$

Esercizio $\quad | \; a_1 = 0$

Esercizio

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{4}{4-a_n} \end{cases}$$

CE $a_n \neq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \frac{4}{4-x} \qquad a_{n+1} = f(a_n)$$

$$f'(x) = 4 \cdot \left(- \frac{(-1)}{(4-x)^2} \right) = \frac{4}{(4-x)^2} > 0$$

sempre

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce sempre

$$a_2 = \frac{4}{4-a_1}$$

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = \frac{4}{4-0} = 1$$

$$a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$$

$$a_2 < a_3$$

$$\Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \searrow \in\mathbb{R} \end{cases}$$

<u>caso 1</u> $\ell\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\ell = F(\ell)$

$\lim a_n = \ell$ ma anche $\lim a_{n+1} = \ell$

$$\Rightarrow \quad F(\ell) = \lim F(a_n) = \lim a_{n+1} = \ell$$

ossia $\ell = \dfrac{4}{4-\ell}$

$$(4-\ell)\,\ell = 4$$

$$-\ell^2 + 4\ell - 4 = 0$$

$$\ell^2 - 4\ell + 4 = 0$$

$$(\ell-2)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \ell = 2$$

verifico se $\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = 2$

$$\Rightarrow \quad a_n \leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$a_1 = 0 \leq 2$ OK

Suppongo che $a_n \le 2 \overset{?}{\Rightarrow} a_{n+1} \le 2$

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n}$$

$a_n \le 2 \Rightarrow -a_n \ge -2$

$$4 - a_n \ge 4 - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4 - a_n} \le \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n} \le \frac{4}{2} = 2$$

Concludo $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$